

Fraktaler og kaos

Harald Hanche-Olsen

hanche@math.ntnu.no

Sammendrag. Tillegg til dynamiske systemer 2007. Etter notater av Nils A. Baas. Notatet gir et kort og meget konsist sammendrag av begrepene rundt fraktaler og kaos i diskrete dynamiske systemer.

Fraktaler

Det finnes ingen rigorøs definisjon av hva det vil si for en mengde å være en fraktal. Fraktaler er på mange måter motsetningen til glatte kurver og flater: De har skarpe hjørner og masse fine detaljer uansett hvilken skala man ser dem på.

Den mest berømte fraktalen må utvilsomt være Mandelbrotmengden, som består av de komplekse tall c som er slik at iterasjonen $z_{n+1} = z_n^2 + c$ med $z_0 = 0$ produserer en begrenset følge (z_n) .

Mer klassiske fraktaler inkluderer Cantormengden, von Kochs snøflak, Sierpinski-trekanten og Juliamengdene.

I dette notatet betrakter vi først og fremst fraktaler som kan konstrueres ved itererte funksjonssystemer.

Itererte funksjonssystemer.

I dette avsnittet er (X, d) et komplett metrisk rom. Vi lar $\mathcal{H}(X)$ bestå av alle ikketomme kompakte delmengder av X . I praksis vil vi alltid la X være et Euklidsk rom \mathbb{R}^n med standard metrikk $d(x, y) = |x - y|$. Husk at en delmengde av \mathbb{R}^n er kompakt hvis og bare hvis den er lukket og begrenset.

Vi kan gjøre $\mathcal{H}(X)$ til et metrisk rom ved å definere *Hausdorff-metrikken* på $\mathcal{H}(X)$ ved

$$h(A, B) = \max\left(\max_{a \in A} \text{dist}(a, B), \max_{b \in B} \text{dist}(b, A)\right),$$

der $\text{dist}(a, B)$ er *avstanden* fra a til B , definert ved¹

$$\text{dist}(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b).$$

¹For en generell (ikkekompakt) mengde B må avstanden i stedet defineres ved infimum.

1 Teorem. Dersom X er et komplett metrisk rom er $(\mathcal{H}(X), h)$ et komplett metrisk rom.

Bevis: For å vise at h er en metrikk, må vi vise at h er symmetrisk (opplagt), at $h(A, A) = 0$ og $h(A, B) > 0$ når $A \neq B$ (også opplagt), og trekantulikheten.

Dersom $a \in A$, kan vi finne $b \in B$ med $d(a, b) \leq h(A, B)$. Deretter kan vi finne en $c \in C$ med $d(b, c) < h(B, C)$. Dermed er $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \leq h(A, B) + h(B, C)$. Siden $a \in A$ var vilkårlig, er altså

$$\max_{a \in A} \text{dist}(a, C) \leq h(A, B) + h(B, C).$$

Gjenta det samme argumentet med A og C byttet om, og trekantulikheten $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$ følger.

Det gjenstår å vise kompletthet. Betrakt en Cauchyfølge (A_n) i $\mathcal{H}(X)$. For å vise konvergens av en Cauchyfølge er det tilstrekkelig å vise at en delfølge konvergerer: Så ved å erstatte den gitte følgen med en delfølge kan vi anta at $h(A_m, A_n) < 2^{-m}$ for alle m og n med $m < n$. La så

$$B = \{b \in X : \text{dist}(b, A_m) \leq 2^{-m} \text{ for alle } m\}.$$

For å se at B er ikketom, velg en vilkårlig $a_k \in A_k$ og deretter ved induksjon en $a_n \in A_n$ for $n = k + 1, k + 2, \dots$ slik at $d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n}$ for alle n . Det gir, for $k + 2 \leq m < n$,

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d(a_m, a_{m+1}) + d(a_{m+1}, a_{m+2}), \dots, d(a_{n-1}, a_n) \\ &< 2^{-m} + 2^{-m-1} + \dots + 2^{-n} < 2^{-m+1}, \end{aligned}$$

som viser at (a_n) er en Cauchyfølge og dermed konvergent. Hvis b er grensen så er, for $m < n$,

$$\text{dist}(b, A_m) \leq d(b, a_n) + \text{dist}(a_n, A_m) \leq d(b, a_n) + h(A_n, A_m) < d(b, a_n) + 2^{-m}.$$

Lar vi $n \rightarrow \infty$ så følger $\text{dist}(b, A_m) \leq 2^{-m}$. Dermed er $b \in B$, så B er ikketom.

Ikke bare det, men vi har funnet en $b \in B$ med $d(a_k, b) \leq 2^{-k+1}$. Altså er $\text{dist}(a_k, B) \leq 2^{-k+1}$ for alle $a_k \in A_k$. Siden $\text{dist}(b, A_k) \leq 2^{-k}$ per definisjon, for hver $b \in B$, så følger at $h(B, A_k) \leq 2^{-k+1}$. Derfor vil $A_k \rightarrow B$ i Hausdorff-metrikken når $k \rightarrow \infty$, og beviset er nesten komplett.

Vi har i farten oversett behovet for å vise at B er kompakt. Så la (b_n) være en vilkårlig følge i B . For hver m og n , velg $a_{mn} \in A_m$ med $d(a_{mn}, b_n) \leq$

2^{-m} . Så bruker vi kompaktheten av hver A_m til å velge en delfølge slik at a_{mn} konvergerer i A_m når $n \rightarrow \infty$, og et diagonalargument (som jeg hopper over her) viser at vi kan få til alt dette ved å erstatte den opprinnelige følgen med en delfølge. For ikke å grumse til notasjonen skriver vi fortsatt (b_n) for denne delfølgen, og (a_{mn}) for den tilsvarende delfølgen i A_m . Vi skriver $a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$.

For $m_1 < m_2$ så er $d(a_{m_1 n}, a_{m_2 n}) \leq (a_{m_1 n}, b_n) + (b_n, a_{m_2 n}) \leq 2^{-m_1} + 2^{-m_2} < 2^{-m_1+1}$. Lar vi så $n \rightarrow \infty$ får vi i grensen $d(a_{m_1}, a_{m_2}) \leq 2^{-m_1+1}$, så følgen (a_m) er Cauchy, og dermed konvergent. Skriv $b = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$. Vi finner $d(b, b_n) \leq d(b, a_m) + d(a_m, a_{mn}) + d(a_{mn}, b_n) \leq 2^{-m+1} + d(a_m, a_{mn}) + 2^{-m}$. Gitt $\varepsilon > 0$ fikserer vi først m med $2^{-m+2} < \varepsilon$. Dette gir oss $d(b, b_n) < \varepsilon + d(a_m, a_{mn})$. For stor nok n er så $d(a_m, a_{mn}) < \varepsilon$, så vi får $d(b, b_n) < 2\varepsilon$, og vi har vist at $b_n \rightarrow b$, og dermed kompaktheten av B . ■

2 Definisjon. La (X, d) være et metrisk rom. $f: X \rightarrow X$ kalles en *kontraksjon* dersom det finnes r , med $0 \leq r < 1$ slik at

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Den minste r som oppfyller ulikheten kalles *kontraksjonsfaktoren*.

Anta det er gitt en endelig mengde av kontraksjoner $\psi_i: X \rightarrow X$ ($i = 1, \dots, n$). Definér så $\psi: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ ved

$$\psi(E) = \psi_1(E) \cup \psi_2(E) \cup \dots \cup \psi_n(E)$$

der $\psi_i(E) = \{\psi_i(x) : x \in E\}$.

3 Teorem. Under betingelsene nevnt ovenfor finnes en entydig $A \in \mathcal{H}(X)$ slik at $\psi(A) = A$. Videre, for enhver $B \in \mathcal{H}(X)$ vil $\psi^k(B) \rightarrow A$ i Hausdorff-metrikken når $k \rightarrow \infty$.

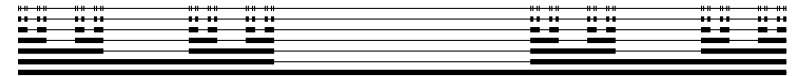
Bevis: La r_i være kontraksjonsfaktoren til ψ_i . Vi skal vise at ψ er en kontraksjon på $\mathcal{H}(X)$ med kontraksjonsfaktor høyst lik $r = \max_i r_i$. Da vil konklusjonen følge umiddelbart fra Banachs fikspunktsats.

Om A og B er kompakke, ikketomme mengder så kan et vilkårlig element i $\psi(A)$ skrives $\psi_i(a)$ der $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og $a \in A$. Da finnes $b \in B$ slik at $d(a, b) \leq h(A, B)$, og så blir $d(\psi_i(a), \psi_i(b)) \leq r_i d(a, b) \leq r h(A, B)$. Altså er

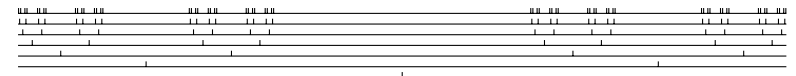
$\text{dist}(\psi_i(a), \psi(B)) \leq r h(A, B)$. Tilsvarende gjelder med A og B byttet om, så $h(\psi(A), \psi(B)) \leq r h(A, B)$. ■

ψ kalles gjerne et iterert funksjonssystem, eller IFS. Mengden A kalles *attraktoren til* ψ_1, \dots, ψ_n . I blant kalles den også *fraktalen definert ved* ψ_1, \dots, ψ_n , men det er ikke alltid betegnelsen passer, siden attraktoren ikke nødvendigvis behøver være fraktal.

4 Eksempel. Med $X = \mathbb{R}$, $\psi_1(x) = x/3$ og $\psi_2(x) = x/3 + 2/3$ får vi den klassiske *Cantor-mengden*, som også kan defineres ved at man starter med intervallet $[0, 1]$, fjerner den midterste tredjedelen $(1/3, 2/3)$, fjerner den midterste tredjedelen av hvert av de to gjenværende intervallene, etc. (Etter første runde står man altså igjen med $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, hvorfra man fjerner $(1/9, 2/9)$ og $(7/9, 8/9)$ og står igjen med $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Fra hvert av disse fire intervallene fjerner man den midterste tredjedelen, og slik fortsetter man. Cantor-mengden består av alle de punktene i $[0, 1]$ som aldri blir fjernet etter denne prosedyren. Den består av alle tall mellom 0 og 1 som kan skrives i tretallsystemet uten å bruke tallsifferet 2.) Denne konstruksjonen er helt ekvivalent med iterasjonen $\psi^k([0, 1])$, $k = 1, 2, \dots$



Figur 1: Iterasjoner av startmengden $[0, 1]$ som konvergerer mot Cantor-mengden.



Figur 2: Iterasjoner av startmengden $\{1/2\}$ som konvergerer mot Cantor-mengden.

Fraktaldimensjon. Betrakt en kurve av endelig lengde L . En slik kurve kan tilnærmes med en brukket linje av lengde $\leq L$, der hvert linjestykke har

lengde $\leq \varepsilon$. Lar vi disse linjestykkene være diameter i hver sin sirkel av diameter ε , så er kurven inneholdt i unionen av disse sirklene.² Det trengs altså i størrelsesorden ε^{-1} sirkler med diameter ε for å dekke en glatt kurve.

Prøver vi samme argument med et glatt flateestykke, kommer vi til at vi trenger ε^{-2} baller av radius ε for å dekke det, siden hver av dem bare dekker et areal $\pi\varepsilon^2$.

5 Definisjon. La $A \in \mathcal{H}(X)$. For gitt $\varepsilon > 0$, la $N(\varepsilon)$ være det minste antall kuler med radius ε som trengs for å dekke A . Dersom det finnes et tall $D = D_F(A)$ slik at

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D+o(1)} \quad \text{når } \varepsilon \rightarrow 0,$$

så kalles D *fraktaldimensjonen* til A .

Ved å ta logaritmen i det ovenstående ser vi lett at

$$D_F(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

og eksistensen av denne grensen er ekvivalent med definisjonen over.

Det kan være verdt å merke seg at når C er en positiv konstant, så er $C = \varepsilon^{\ln C / \ln \varepsilon}$, så en multiplikativ konstant absorberes med letthet av faktoren $\varepsilon^{o(1)}$. Det spiller altså ingen rolle for definisjonen om vi måler størrelsen på baller ved radien eller diameteren, og om vi forstørrer en mengde med en konstant faktor så er også fraktaldimensjonen uendret.

Et annet mye brukt dimensjonsbegrep som kan gi ikke-heltallige dimensjoner er *Hausdorff-dimensjonen*, som har en noe mer komplisert definisjon. Men den fraktale dimensjonen og Hausdorff-dimensjonen stemmer overens på svært mange interessante eksempler.

Hausdorff-dimensjonen er indirekte definert via Hausdorff-målet μ_d , som vi ikke skal definere her. μ_d tilordner et tall $\mu_d(A) \in [0, \infty]$ til hver målbar mengde $A \in \mathbb{R}^n$, der $0 \leq d < \infty$. $\mu_0(A)$ er antall punkter i A , $\mu_1(A)$ er lengden av A (om A er en kurve), $\mu_2(A)$ er overflaten av A , etc. Men $\mu_d(A)$ er også definert for ikke-heltallige d . For hver mengde A finnes en $D \geq 0$ slik at $\mu_d(A) = \infty$ om $d < D$ og $\mu_d(A) = 0$ om $d > D$. Denne verdien av D er Hausdorff-dimensjonen til A .

²Jeg lyver litt her: Dette er sant om kurven er glatt og ε er liten nok, men generelt kan kurven ha knekkpunkter som gjør påstanden feil. Argumentet lar seg reparere, men siden hensikten først og fremst er å motivere her, lar jeg det være.

6 Eksempel. For den klassiske Cantormengden C og for $\varepsilon = 3^{-k}/2$ ser vi at vi kan dekke C med 2^k kuler av radius ε , og ikke noe mindre antall vil gjøre det samme. Det er nærliggende å konkludere at

$$D_F(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln(3^k/2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{k \ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln 3},$$

og dette stemmer også. (Du må bruke at $N(\varepsilon_1) \geq N(\varepsilon_2)$ når $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ for å komplettere beviset.)

7 Definisjon. En *similitude* i \mathbb{R}^n er en kontraksjon som er satt sammen av krympninger, rotasjoner, translasjoner og refleksjoner.

En krympning er en dilatasjon $\psi(x) = \alpha x$ der $0 \leq \alpha < 1$.

Vi sier at $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ er *ikke-overlappende* om $\psi_i(A) \cap \psi_j(A) = \emptyset$ når $i \neq j$, hvor A er attraktoren til $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$.

8 Teorem. La S_1, S_2, \dots, S_m være en ikke-overlappende mengde av similituder i \mathbb{R}^n . Da er fraktaldimensjonen $D = D_F(A)$ av den assosierte attraktoren gitt ved

$$\sum_{i=1}^m s_i^D = 1 \quad (1)$$

der s_i er kontraksjonsfaktoren til S_i .

Faktisk viser det seg at konklusjonen i teoremet holder under litt svakeere betingelser («just touching»), som vi kaller *overlappingsbetingelser*. Den krever ikke bare at $\psi_i(A) \cap \psi_j(A)$ skal være *neglisjerbar* i en viss forstand, men at en neglisjerbar delmengde av $\psi_i(A)$ og $\psi_j(A)$ befinner seg i nærheten av snittet, slik at ligning (2) i beviset nedenfor holder med tilstrekkelig god tilnærming.

Bevis: For tilstrekkelig små ε , la oss si for $\varepsilon < \eta$, må

$$N(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n N\left(\frac{\varepsilon}{s_i}\right), \quad (2)$$

for om ε er liten nok kan ingen ball av radius ε ha ikketomt snitt med mer enn én av mengdene $S_i(A)$, og avbildningen S_i vil avbilde baller av radius ε/s_i som dekker A på baller av radius ε som dekker $S_i(A)$ (og S_i^{-1} gjør tilsvarende i den andre retningen).

Nå skriver vi $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D} K(\varepsilon)$, der D er gitt ved (1). Setter vi dette inn i (2) og multipliserer med ε^D står vi igjen med

$$K(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n s_i^D K\left(\frac{\varepsilon}{s_i}\right). \quad (3)$$

Legg merke til at høyresiden i denne ligningen er et veiet gjennomsnitt av $K(\varepsilon/s_1), \dots, K(\varepsilon/s_n)$.

For enkelthets skyld kan vi ordne similitudene slik at $s_1 \leq \dots \leq s_n$.

Nå er $N(\varepsilon) \geq 1$ en monotont avtagende funksjon av ε . Derfor er $K(\varepsilon)$ begrenset både oppad og nedad på ethvert intervall $[\delta, \eta]$ der $\delta > 0$. Velg $\delta < s_1 \eta$, og merk at vi har konstanter α og β med $0 < \alpha \leq K(\varepsilon) \leq \beta$ for $\varepsilon \in [\delta, \eta]$.

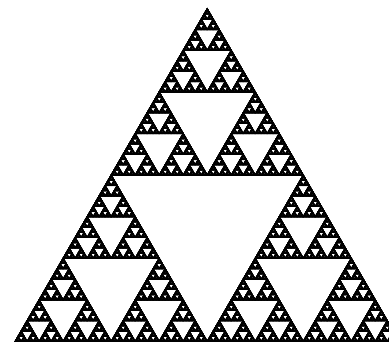
Det følger av (3) og (1) at ulikhetene $\alpha \leq K(\varepsilon) \leq \beta$ også vil holde for de $\delta s_n \leq \varepsilon < \delta$, og dermed for alle $\varepsilon \in [\delta s_n, \eta]$. Men gjentar vi prosedyren, følger ulikhetene for $\varepsilon \in [\delta s_n^2, \eta]$, for $\varepsilon \in [\delta s_n^3, \eta]$, og så videre, og dermed gjelder generelt, for $0 < \varepsilon \leq \eta$, at

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D} K(\varepsilon) = \varepsilon^{-D+k(\varepsilon)/\ln \varepsilon}$$

der $k(\varepsilon) = \ln K(\varepsilon)$ er begrenset. Nå er det bare å la $\varepsilon \rightarrow 0$ for å fullføre beviset. ■

9 Eksempel. Cantormengden C er attraktoren til to ikke-overlappende similituder, hver med kontraksjonsfaktor $\frac{1}{3}$. Så den fraktale dimensjonen blir gitt ved $2(\frac{1}{3})^D = 1$, som gir $D = \ln 2 / \ln 3$.

10 Eksempel. Sierpinski-trekanten er attraktoren til tre similituder $S_i(x) = (x + H_i)/2$ i \mathbb{R}^2 der H_i er hjørnet nummer i i en likesidet trekant, for $i = 1, 2, 3$. Dette gir uten videre en fraktal dimensjon D gitt ved $3(\frac{1}{2})^D = 1$, som gir $D = \ln 3 / \ln 2$. Det skal bemerkes at disse similitudene ikke er ikkeoverlappende i streng betydning, men de oppfyller overlappingsbetingelsene nevnt i merknaden til teoremet ovenfor.



Figur 3: Sierpinski-trekanten.

Kaos

Vi begrenser oss her til diskrete endimensjonale systemer. La J være et intervall.

11 Definisjon. En funksjon $f: J \rightarrow J$ kalles *transitiv* dersom det for alle ikketomme åpne delmengder U og V av J finnes en k slik at $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Med andre ord, det finnes minst ett punkt i U som under et passende antall iterasjoner av f beveger seg inn i V .

12 Definisjon. En funksjon $f: J \rightarrow J$ kalles *sensitivt* avhengig av initialdata dersom det finnes en $\delta > 0$ slik at for hver $x \in J$ og omegn N om x finnes $y \in N$ og $k > 0$ slik at

$$|f^k(x) - f^k(y)| > \delta.$$

Intuitivt: «Det finnes punkter vilkårlig nær x som under iterasjon blir separert minst en avstand δ .»

13 Definisjon. Et punkt $x_0 \in J$ kalles *periodisk* dersom det finnes $k \geq 1$ slik at $f^k(x_0) = x_0$.

14 Definisjon. En funksjon $f: J \rightarrow J$ kalles *kaotisk* dersom:

- f er sensitivt avhengig av initialdata,

- f er transitiv,
- de periodiske punktene til f er tett i J .

Et kaotisk system er uforutsigbart i det lange løp (sensitivitet), kan ikke dekomponeres i undersystemer (transitivitet), men har en viss regularitet i og med at det finnes periodiske punkter «nesten overalt».

15 Eksempel. At denne funksjonen er kaotisk på $J = [0, 1]$ er ikke så vanskelig å vise:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 2(1-x) & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Med notasjonen $\langle x \rangle = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ så er det ikke vanskelig å vise at $f^k(x) = 2^k \langle 2^k x \rangle$, og f^k har 2^k fikspunkter som ligger tilnærmet uniformt fordelt i $[0, 1]$. Både sensitiv avhengighet av initialdata og transitiviteten følger av at $[0, 1]$ kan deles inn i 2^k småintervaller av lengde 2^{-k} , slik at f^k avbilder hvert av disse småintervallene på $[0, 1]$. Jeg overlater detaljene i beviset til leseren.

16 Eksempel. Funksjonen $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gitt ved $f(x) = 4x(1-x)$ er kaotisk, men dette krever noe mer argumentasjon. Hovedpoenget med funksjonen er at $f(0) = f(1) = 0$ og $f(x) = 1$ for en x mellom 0 og 1.

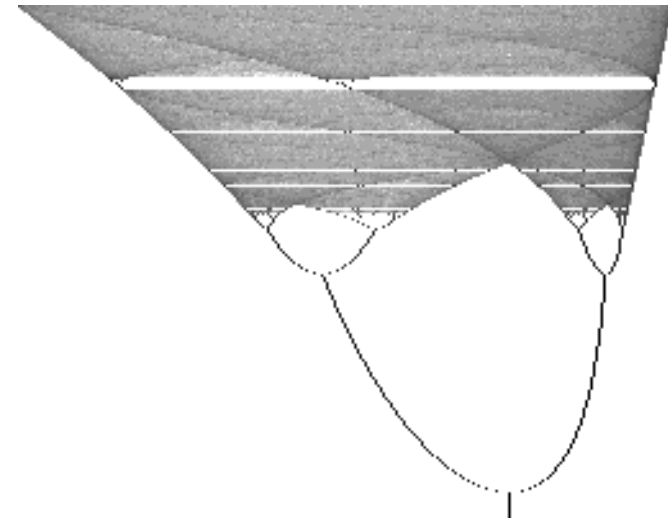
Bifurkasjoner til kaos. *Verhulsts dynamiske system*, gitt ved

$$f_r(x) = (1+r)x - rx^2,$$

er det klassiske eksemplet på hvordan gjentatt periodefordobling leder til kaos.

f_r har to fikspunkter, 0 og 1. For $r > 0$ er alltid fikspunktet i 0 ustabil ($|f'_r(0)| > 1$) mens fikspunktet i 1 er stabilt for $0 \leq r < 2$ og ustabil for $r > 2$. I det r vokser forbi 2 oppstår en såkalt *bifurkasjon*: Det stabile fikspunktet i $x = 1$ blir til et ustabil fikspunkt (fortsett $x = 1$) mens det oppstår en stabil sykel med periode 2 mellom de to punktene

$$x = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{r}}.$$



Figur 4: Verhulsts dynamiske system. Her varierer r fra 1.95 (nederst) til 3 (øverst), og x fra 0 (venstre side) til $4/3$ (høyre side). For hver r -verdi er $(f_r^k(x_0), r)$ plottet inn i figuren for $k = 5000, \dots, 9095$. Mørkere punkter er truffet flere ganger av iterasjonen. *Figuren finnes også i farger, med betydelig bedre kvalitet enn her, på følgende URL:*

<http://www.math.ntnu.no/~hanche/kurs/dynsys/1997v/verhulst.html>

I figuren vises dette ved at den vertikale linjen nederst ($x = 1$) deles i to grener. For en større r -verdi skjer en ny bifurkasjon: Denne gangen er det den stabile 2-sykelen som blir ustabil, men samtidig gir opphav til en stabil 4-sykel. Slike bifurkasjoner skjer gjentatte ganger, for verdier $2 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots$: Ved r_k vil en stabil sykel med periode 2^k bli ustabil og gi opphav til en stabil sykel med periode 2^{k+1} . Forholdstallene mellom avstanden mellom på hverandre følgende bifurkasjoner er av spesiell interesse: Det viser seg at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} = 4.669201609102990671853\dots$$

hvor tallet på høyresiden, *Feigenbaums konstant*, er det samme for alle kjente dynamiske systemer som går gjennom periodefordoblinger på den-

ne måten ved variasjon av en parameter.³

Når r har vokst forbi $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k$, blir systemet kaotisk, men ikke på et intervall slik vi har definert det her. Man kan også se at det dukker opp *gap* for visse intervaller, der r i disse intervallene gir en ny stabil sykel. I alle tilfeller går denne gjennom nye periodefordoblinger til man har kaos igjen.

For $r = 3$ (helt på toppen av figuren) har vi et dynamisk system på $[0, 4/3]$ som er ekvivalent med Eksempel 16: Om vi setter $h(x) = 4x/3$ er $(h^{-1} \circ f_3 \circ h)(x) = 4x(1 - x)$.

³Første utgave av dette notatet ga verdien 4.669201660910... for Feigenbaums konstant. Jeg har siden funnet ut at dette er en trykkfeil som har spredd seg i litteraturen.