Litt topologi i euklidske rom

Harald Hanche-Olsen

hanche@imf.unit.no

Sammendrag. Dette notatet inneholder en kort innføring i topologi i euklidske rom, med vekt på kompakthet. Om du ønsker en noe dypere innføring som anvender metriske rom kan du se i et notat laget for 75042 Partielle differensialligninger høsten 1996, som finnes i

http://www.math.ntnu.no/~hanche/kurs/pde/1996h/analysis.html

Innledning og notasjon

Dette avsnittet oppsummerer notasjon og resultater om åpne og lukkede mengder som antas kjent.

Mengden av reelle tall skrives $\mathbb{R}$ og det Euklidske n–dimensjonale rommet $\mathbb{R}^n$ består av alle n–tupler $x = (x_1, \dots, x_n)$ der $x_j \in \mathbb{R}$ for $j = 1, \dots, n$.

Den viktigste topologiske egenskapen til $\mathbb{R}$, som skiller $\mathbb{R}$ fra mengden $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall, er eksistensen av *supremum* og *infimum* til begrensede mengder: Om A er en begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ finnes et *minste* tall $M \in \mathbb{R}$ med egenskapen $a \le M$ for alle $a \in A$. Dette tallet er $\sup A$. Tilsvarende defineres $\inf A$ som det *største* tallet m med egenskapen $a \ge m$ for alle $a \in A$.

Merk at det finnes ikke noe *rasjonalt* tall som er et supremum for $\{a \in \mathbb{Q} \colon a^2 < 2\}$.

En delmengde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles *åpen* dersom det, for hver $x \in V$ finnes en $\varepsilon > 0$ slik at for hver $y \in \mathbb{R}^n$ med $|y - x| < \varepsilon$ er $y \in V$.

Vi skriver $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < \varepsilon\}$ og kaller dette den åpne *ε–omegnen* om x (eller *ε–ballen* om x, hvorav bokstaven B).

Med andre ord er V åpen hvis og bare hvis den inneholder en ε–omegn om ethvert av sine punkter. En omegn om x er simpelthen en mengde som inneholder en ε–omegn om x, og en åpen mengde er derfor en mengde som er en omegn om alle sine punkter.

Et punkt x sies å tilhøre *tillukningen* av en mengde $F \subseteq \mathbb{R}^n$ dersom enhver omegn om x har ikketomt snitt med F. En annen måte å si det på er at, for enhver $\varepsilon > 0$ finnes $y \in F$ med $|y - x| < \varepsilon$. En tredje formulering er at det finnes en følge i F som konvergerer mot x. Vi skriver $\overline{F}$ for tillukningen til F.

En delmengde $F \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles *lukket* dersom den er sin egen tillukning. Ekvivalent er at komplementet $\mathbb{R}^n \sim F$ er åpen.[1]

[1] $A \sim B = \{x \in A \colon x \notin B\}$ er den mengdeteoretiske differensen mellom A og B. Det er kanskje mer vanlig å skrive $A \setminus B$, men jeg følger notasjonen til Perko her.

Den *lukkede* ε–omegnen $\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y\colon |y-x| \le \varepsilon\}$ kommer også til nytte iblant.

Kompakthet

Lukkede begrensede delmengder av $\mathbb{R}^n$ og deres egenskaper er viktige i mange sammenhenger. Det er mange ekvivalente karakteriseringer av lukkede begrensede delmengder. Vi skal se på de viktigste.

Snittegenskaper. En mengde $\mathscr{F}$ av delmengder av $\mathbb{R}^n$ sies å ha *endelig snittegenskap* dersom enhver endelig delmengde av $\mathscr{F}$ har ikketomt snitt, det vil si

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathscr{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \ne \emptyset.$$

Her er noen eksempler.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathscr{F} = \{[x,\infty)\colon x \in \mathbb{R}\} \\ \text{(b)} & \mathscr{F} = \{[-\varepsilon,\varepsilon]\colon \varepsilon > 0\} \\ \text{(c)} & \mathscr{F} = \{\{x \in \mathbb{Q}\colon |x^2-2| \le 1/k\}\colon k = 1,2,\ldots\} \end{array}$$

Vi skriver

$$\bigcap \mathscr{F} = \{x\colon x \in F \text{ for minst en } F \in \mathscr{F}\}$$

for snittet av alle mengder i $\mathscr{F}$, og merker oss at $\bigcap\mathscr{F} = \emptyset$ i tilfellene (a) og (c) ovenfor, men $\bigcap\mathscr{F} = \{0\}$ i tilfelle (b).

$\mathscr{F}$ sies å ha endelig snittegenskap *relativt* til en mengde $K \subset \mathbb{R}^n$ dersom $\{K \cap F\colon F \in \mathscr{F}\}$ har endelig snittegenskap.

1 Definisjon. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles *kompakt* om, hver gang $\mathscr{F}$ er en mengde av lukkede delmengder av $\mathbb{R}^n$ med endelig snittegenskap relativt til K, gjelder $K \cap \bigcap\mathscr{F} \ne \emptyset$.

2 Teorem. *En delmengde av $\mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis den er lukket og begrenset.*

Bevis: Vi viser først at om $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ikke er lukket, er K ikke kompakt. Anta $x \in \overline{K}$ men $x \notin K$. La så

$$\mathscr{F} = \{\overline{B}_\varepsilon(x)\colon \varepsilon > 0\}$$

så er det ikke vanskelig å se at $\mathscr{F}$ har endelig snittegenskap relativt til K, men $K \cap \bigcap\mathscr{F} = \emptyset$, så K er ikke kompakt.

At en ubegrenset mengde heller ikke er kompakt vises tilsvarende ved å velge
$$\mathscr{F} = \{\mathbb{R}^n \sim B_r(x) \colon r > 0\}.$$

Vi antar nå at $K \subset \mathbb{R}^2$ er lukket og begrenset, og skal vise at K er kompakt. (Vi begrenser oss til tilfellet $n = 2$ for å holde notasjonen enkel. Det burde være opplagt hvordan beviset generaliseres til $K \subset \mathbb{R}^n$ for vilkårlig n.)

Siden K er begrenset finnes a_0, b_0, c_0 og d_0 slik at $K \subseteq [a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$. Vi skal bestemme $a_j \le b_j$, $c_j \le d_j$ med $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$, $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots$, $c_0 \le c_1 \le c_2 \le \cdots$ og $d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots$ slik at
$$K_j = ([a_j, b_j] \times [c_j, d_j]) \cap K \ne \emptyset$$
og slik at $\mathscr{F}$ har endelig snittegenskap relativt til K_j. Om vi har gjort dette for en gitt $j \ge 0$ setter vi $e_j = (a_j + b_j)/2$ og $f_j = (c_j + d_j)/2$ og legger merke til at
$$\begin{aligned} K_j = {} & \overbrace{([a_j, e_j] \times [c_j, f_j]) \cap K} \cup \overbrace{([a_j, e_j] \times [f_j, d_j]) \cap K} \\ & \cup \underbrace{([e_j, b_j] \times [c_j, f_j]) \cap K}_{(*)} \cup \underbrace{([e_j, b_j] \times [f_j, d_j]) \cap K} \end{aligned}$$
slik at $\mathscr{F}$ må ha endelig snittegenskap relativt til minst en av disse fire mengdene.[2] Vi lar K_{j+1} være en av disse. Om vi for eksempel valgte den merket $(*)$ ovenfor, setter vi da $a_{j+1} = e_j$, $b_{j+1} = b_j$, $c_{j+1} = c_j$ og $d_{j+1} = d_j$.

Siden $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$ og denne følgen er begrenset, finnes $a = \sup\{a_0, a_1, \ldots\}$ og det er lett å se at $a_k \to a$ når $j \to \infty$. Tilsvarende eksisterer $b = \lim b_j$, $c = \lim c_j$ og $d = \lim d_j$. Men fordi $b_j - a_j = 2^{-j}(b_0 - a_0)$ er $b = a$, og tilsvarende er $d = c$.

Gitt $\varepsilon > 0$ vil $K_j \subset B_\varepsilon(a, b)$ for alle store nok j. Lar vi $z_j \in K_j$ for alle j vil derfor $z_j \to (a, b)$. Siden K er lukket er derfor $(a, b) \in K$. La nå $F \in \mathscr{F}$. Så er $F \cap K_j \ne \emptyset$, og dermed er $F \cap B_\varepsilon(a, b) \ne \emptyset$. Siden dette gjelder alle $\varepsilon > 0$ og F er lukket er $(a, b) \in F$. Dermed er $(a, b) \in \bigcap \mathscr{F}$, og vi har vist at $K \cap \bigcap \mathscr{F} \ne \emptyset$. Dette viser at K er kompakt, og avslutter beviset. ∎

Konvergente delfølger. En følge (y_j) kalles en *delfølge* av en følge (x_k) dersom det finnes indekser $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ slik at $y_j = x_{k_j}$ for alle j.

3 Teorem. *En delmengde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis enhver følge i K har en delfølge som konvergerer mot et punkt i K.*

[2] Om vi arbeider i $\mathbb{R}^n$ må vi dele K_j i 2^n deler ved å splitte på midten i hver av den n koordinatene.

Bevis: Anta først at K er kompakt, og la (x_k) være en følge i K. La

$$F_k = \overline{\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Siden K er kompakt finnes $z \in K \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. La $\varepsilon_j > 0$ og $\varepsilon_j \to 0$ når $j \to \infty$. Siden $z \in F_1$ finnes k_1 med $|z - x_{k_1}| < \varepsilon_1$. Om vi har valgt $k_1 < k_2 < \cdots < k_j$, bruker vi det faktum at $z \in F_{k_j+1}$ til å finne $k_{j+1} > k_j$ med $|z - x_{k_{j+1}}| < \varepsilon_{j+1}$. Det er nå ganske klart at $x_{k_j} \to z$; det vil si at (x_k) har en delfølge som konvergerer mot z. Siden K er kompakt er K lukket, og dermed er $z \in K$.

Omvendingen er lett å vise: Om K ikke er kompakt finnes en følge i K som konvergerer mot et punkt utenfor K (om K ikke er lukket) eller mot uendelig (om K ikke er begrenset). I begge tilfeller vil ingen delfølge konvergere mot et punkt i K. ∎

Overdekninger. En *åpen overdekning* for en mengde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er en mengde $\mathscr{U}$ av åpne delmengder av $\mathbb{R}^n$ slik at $K \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. Unionen av $\mathscr{U}$ er definert ved

$$\bigcup \mathscr{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{det finnes } U \in \mathscr{U} \text{ slik at } x \in U\}.$$

En *underoverdekning* er en delmengde av $\mathscr{U}$ som også er en overdekning for K, og en slik underoverdekning kalles *endelig* om den har endelig mange medlemmer.[3]

4 Teorem. *En delmengde av $\mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis enhver åpen overdekning av mengden inneholder en endelig underoverdekning.*

Bevis: Jeg har mest lyst til å overlate beviset til leseren. Til en samling $\mathscr{U}$ av åpne mengder kan man lage en samling lukkede mengder ved å ta komplementer:

$$\mathscr{F} = \{\mathbb{R}^n \sim U : U \in \mathscr{U}\}$$

og det viser seg at $\mathscr{U}$ er en åpen overdekning av K hvis og bare hvis $K \cap \bigcap \mathscr{F} = \emptyset$, og $\mathscr{U}$ har en endelig underoverdekning hvis og bare hvis $\mathscr{F}$ ikke har endelig snittegenskap relativt til K.

Da tror jeg det er trygt å overlate detaljene til leseren. ∎

Anvendelser av kompakthet

Kontinuerlige funksjoner på kompakte mengder er begrensede og uniformt kontinuerlige, og rommet av alle slike funksjoner er komplett.

[3] Overrasket?

5 Proposisjon. *Et kontinuerlig bilde av en kompakt mengde er kompakt.*

Med andre ord: Om $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er kompakt og $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig er $f(K) = \{f(x)\colon x \in K\}$ også kompakt.
Bevis: La $\mathscr{F}$ være en mengde lukkede delmengder av $\mathbb{R}^m$ som har endelig snittegenskap relativt til $f(K)$. La $\mathscr{E} = \{f^{-1}(F)\colon F \in \mathscr{F}\}$.[4] Da vil $\mathscr{E}$ bestå av lukkede delmengder av K med endelig snittegenskap, og har derfor ikke-tomt snitt siden K er kompakt. La $x \in \bigcap \mathscr{E}$, så er $f(x) \in \bigcap \mathscr{F}$. Dette viser kompakthet av $f(K)$. ∎

6 Korollar. *En kontinuerlig funksjon definert på en kompakt mengde er begrenset. Om funksjonen har reelle verdier vil den anta sin maksimumsverdi og minimumsverdi i K.*

Bevis: Den første delen følger fordi en kompakt mengde er begrenset. Den andre delen følger fordi $f(K)$ blir en lukket begrenset delmengde av $\mathbb{R}$, og da er $\sup f(K) \in f(K)$ og $\inf f(K) \in f(K)$. ∎
En funksjon f kalles *uniformt kontinuerlig* om det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at for alle x, y i definisjonsområdet til f gjelder

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dette impliserer at f er kontinuerlig, men er ikke ekvivalent: Kontinuitet krever bare at det gitt x og $\varepsilon > 0$ skal finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen over holder for alle y. Forskjellen er at uniform kontinuitet krever at *samme* δ skal kunne brukes uavhengig av x. Som en øvelse kan du vise at funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ ikke er uniformt kontinuerlig.

7 Proposisjon. *En kontinuerlig funksjon definert på en kompakt mengde er uniformt kontinuerlig.*

Bevis: La $\varepsilon > 0$. For hver $x \in K$ finnes $\delta(x) > 0$ slik at

$$|y - x| < 2\delta(x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Kompaktheten gir oss at det finnes $x_1, \dots, x_p \in K$ slik at

$$K \subseteq B_{\delta(x_1)}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\delta(x_p)}(x_p).$$

[4] Her er $f^{-1}(F) = \{x \in K\colon f(x) \in F\}$. Du bør overbevise deg om at $f^{-1}(F)$ er lukket dersom f er kontinuerlig og F er lukket.

La nå $\delta = \min(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_p))$ og anta $y, z \in K$ med $|y-z| < \delta$. Det finnes da en j med $|y-x_j| < \delta(x_j)$. Så er også $|z-x_j| < |z-y|+|y-x_j|\delta+\delta(x_j) \le 2\delta(x_j)$, og derfor er

$$|f(y) - f(z)| < |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(z)| < 2\varepsilon$$

som viser at f er uniformt kontinuerlig.[5] ∎

Kompletthet

En følge (x_k) i $\mathbb{R}^n$ kalles en *Cauchy-følge* dersom det, for enhver $\varepsilon > 0$, finnes N slik at $|x_k - x_m| < \varepsilon$ hver gang $m, k > N$. Du bør overbevise deg selv om at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge. Et rom hvor det omvendte holder, altså der enhver Cauchy-følge er konvergent, kalles *komplett.*

8 Teorem. *$\mathbb{R}^n$ er komplett.*

Bevis: La (x_k) være en Cauchy-følge. Man ser raskt at følgen må være begrenset, og derfor finnes en konvergent delfølge — la oss si $y_j = x_{k_j} \to z$. La $\varepsilon > 0$, og bestem N som i definisjonen ovenfor. Samtidig finnes det M slik at $|y_j - z| < \varepsilon$ hver gang $j > M$. Dersom nå $m > N$ og vi velger $j > M$ slik at $k_j > N$, blir $|x_m - z| \le |x_m - y_j| + |y_j - z| < 2\varepsilon$, og derfor vil $x_m \to z$. ∎

Rommet av kontinuerlige funksjoner. La $K \subset \mathbb{R}^n$ være kompakt. Vi skriver $C(K, \mathbb{R}^m)$ for vektorrommet bestående av alle kontinuerlige funksjoner $K \to \mathbb{R}^m$, og forsyner dette rommet med *maksimumsnormen*

$$\|u\| = \max_{x \in K} |u(x)|.$$

Også om K *ikke* er kompakt, kan vi betrakte rommet av alle *begrensede*, kontinuerlige funksjoner $K \to \mathbb{R}^m$. Vi skriver $C_b(K, \mathbb{R}^m)$ for dette rommet, og ser at $C_b(K, \mathbb{R}^m) = C(K, \mathbb{R}^m)$ dersom K er kompakt.

9 Proposisjon. *Om $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er $C_b(K, \mathbb{R}^m)$ komplett.*

[5] Kanskje plager det deg at vi endte med ulikheten $\ldots < 2\varepsilon$ når definisjonen krever $< \varepsilon$? Men dette er ikke noe problem. Vi kunne bare justert definisjonen av $\delta(x)$ slik at vi får $|y - x| < 2\delta(x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. Men denne slags trivialiteter tilfører ikke beviset noe vesentlig, så jeg pleier unngå dem. Bruken av $2\delta(x)$ i beviset er derimot vesentlig for at det skal fungere.

Bevis: La (u_k) være en Cauchy-følge i $C_b(K, \mathbb{R}^m)$. For hver $x \in K$ ser vi at $(u_k(x))$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{R}^m$, og $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ eksisterer derfor. Vi må bare vise at at u er kontinuerlig og at $\|u_k - u\| \to 0$.

La nå $\varepsilon > 0$ og velg N slik at $\|u_k - u_m\| < \varepsilon$ når $k, m > N$. Dette betyr at $|u_k(x) - u_m(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in K$ når $k, m > N$. Vi lar $m \to \infty$ og konkluderer at $|u_k(x) - u(x)| \le \varepsilon$ for alle $k > N$. Dette er *uniform konvergens*, og brukes til å vise det vi trenger: La $x \in K$ og $\varepsilon > 0$, og velg N som før. La $k > N$ og velg $\delta > 0$ slik at om $|y - x| < \delta$ er $|u_k(y) - u_k(x)| < \varepsilon$. For en slik y blir da

$$|u(y) - u(x)| \le |u(y) - u_k(y)| + |u_k(y) - u_k(x)| + |u_k(x) - u(x)| < 3\varepsilon$$

som viser kontinuiteten av u. Estimatet $\|u_k - u\| \le \varepsilon$ har vi allerede bevist.

∎